DOI: 10.3969/1673-808X.202324
引用本文: 叶菁, 钟艳如. 基于加型一致性的直觉模糊偏好关系三支多属性决策方法[J]. 桂林电子科技大学学报, xxxx, x(x): 1-8.
YE Jing, ZHONG Yanru. A three-way multi-attribute decision-making method with intuitionistic fuzzy preference relationships based on additive consistency[J]. Journal of Guilin University of Electronic Technology, xxxx, x(x): 1-8.

基于加型一致性的直觉模糊偏好关系三支多属性决策方法

叶　菁，钟艳如

（桂林电子科技大学 计算机科学与信息安全学院, 广西 桂林　541004）

摘　要: 三支决策模型通过考虑损失函数与决策矩阵之间的语义关系, 成为解决多属性决策问题的一种有效方法。随着实际决策问题中面临的不确定数据日益增加, 传统的多属性决策方法在复杂语境中表现不佳。针对这一问题, 提出了一种基于加型一致性的直觉判断关系三支多属性决策方法。首先给出加型一致性的直觉模糊偏好矩阵, 得到不同决策方案之间的偏好关系, 并利用矩阵中的偏好信息, 在决策理论粗糙模糊集的背景下进行条件概率的计算; 然后考虑损失函数与直觉模糊数之间的相关性, 采用相对损失函数求得三支决策模型中的相对损失值与决策阈值, 并通过决策规则对决策方案进行分类和排序。最后, 简述所提方法的关键步骤, 并将算法应用到经典的供应商选择实例中, 验证了模型的可行性和有效性。

关键词: 直觉模糊数; 直觉判断矩阵; 加型一致性; 三支决策; 多属性决策
中图分类号： O159　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1673-808X(xxxx)00-0001-08

A three-way multi-attribute decision-making method with intuitionistic fuzzy preference relationships based on additive consistency

YE Jing，ZHONG Yanru

（School of Computer Science and Information Security, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China）

Abstract: The three-way decision model becomes an effective method to solve the multi-attribute decision problem by considering the semantic relationship between the loss function and the decision matrix. With the increasing number of uncertain data faced in real-world decision-making problems, traditional multi-attribute decision-making methods perform poorly in complex contexts. To solve this problem, a three-way multi-attribute decision-making method with intuitionistic fuzzy preference relationships based on additive consistency is proposed. Firstly, we give the intuitionistic fuzzy preference relationships based on additive consistency, the preference relationships between different decision schemes is obtained, and the preference information in the matrix is used to calculate the conditional probability under the background of the rough fuzzy set of decision theory. Then, considering the correlation between the loss function and the intuitionistic fuzzy number, the relative loss function is used to find the relative loss and decision threshold in the three decision models, and the decision scheme is classified and ranked by decision rules. Finally, the key steps of the proposed method are briefly described, and the algorithm is applied to the classic supplier selection example, prove the feasibility and effectiveness of the model.

Key words: intuitionistic fuzzy numbers; intuitionistic judgement matrix; additive consistency; three-way decision; multi-attribute decision-making

收稿日期:
基金项目: 国家自然科学基金(62166011); 广西创新驱动项目(桂科 AA22068071)
通信作者: 钟艳如(1965—), 女, 教授, 研究方向为模糊数学。E-mail: 1467536235@qq.com

决策理论是较为完整的理论体系，为决策制定提供了分析处理的框架，其实际应用涉及现实生活的许多方面，为指导决策提供了理论支持。随着决策理论的深入发展，关于决策方法的研究也日益增多。三支决策 (three-way decision, 简称 TWD) 和多属性决策 (multi-attribute decision-making, 简称 MADM) 是决策理论中 2 个重要的组成部分。

TWD 是一种处理不确定性决策问题的理论，在决策理论研究中发挥着独特的作用。由姚一豫[1-2] 提出的决策理论粗糙集 (decision-theoretic rough sets, 简称 DTRS) 是对 TWD 较为科学合理的解释。DTRS 包含 3 个域：正域、负域和边界域，分别对应一个对象的 3 种决策。当对象在积极领域时，对它采取接受的决策；落入消极领域时，采取拒绝的决策；当它位于边界域时，采取延迟决策的决定。这是一种容错的新视角，符合现实生活中在不确定性下的思维习惯。

目前，对三支决策的模型研究主要集中在损失函数和条件概率[3-7] 上。文献[3] 从模糊多属性决策的角度出发，建立了风险损失模型，并确定了相应的阈值。文献[4] 在文献[3] 的基础上提出了直觉模糊领域的相对损失矩阵，并从不同的角度讨论了 TWD 的分类规则。文献[5] 通过将区间值直觉模糊集引入三支决策中，提供了对损失函数的新描述。文献[6] 在构建毕达哥拉斯模糊决策理论粗糙集模型时，有效地利用了逼近理想解 (TOPSIS) 方法对条件概率进行相似估计。文献[7] 考虑到模糊邻域算子在处理模糊数值时的有用性，提出了一种基于模糊邻域算子的条件概率。

大多数情况下，损失函数是由主观知识与经验评估的，在实践中难以量化，因此可以借助模糊环境来模拟现实语义，例如文献[8] 在不完全模糊决策系统中探索有效的三支多属性决策模型。文献[9] 通过引入语言术语来扩充现有模型，并采用粒子群优化来优化语言术语的尺度。这类模型可以保留更多的决策过程信息，对损失值进行合理估量。

多属性决策 (MADM) 主要根据属性的评价值对决策方案进行排序、择优，是决策研究领域的重要分支。传统的 MADM 方法研究[10-13] 主要集中在理论发展上。例如，文献[10] 中提到的 COPRAS(complex proportion assessment method) 方法是一种提高评价对象整体效率的 MADM 方法。文献[11] 中 VIKOR 方法是一种基于理想点法的决策方法，其基本思想是从 MADM 中寻找最佳折中解。文献[12]FUCOM(full consistency method) 方法基于成对比较的原则，通过偏离最大一致性来验证决策结果。文献[13] 里的 CODAS (combinative distance based assesment) 方法根据负理想解的最大欧氏距离作为主要度量，并应用于多准则决策问题中。

随着数据信息逐渐增多，决策环境日益复杂，学者们开始将 MADM 方法与不确定性理论进行结合。一方面是结合粗糙集和直觉模糊集[14-16]，文献[14] 考虑直觉模糊集环境下的 MADM 问题，并讨论损失函数矩阵的相应性质。文献[15] 也是为 MADM 问题引入直觉模糊对象，用于处理属性权重未知的不确定性问题，能够得到可解释性的结果。文献[16] 结合 VIKOR 方法的折中解决方案和犹豫模糊集元素，为决策结果保留有序信息。另一方面是关注基于模糊偏好关系的研究[17-18]，文献[17] 提出了一种具有不完全概率语言偏好关系的群体决策方法。文献[18] 则是关注于三角乘法偏好关系，开发了一种群体决策方法。

基于上述分析可知，MADM 和 TWD 都是决策领域的重要工具。MADM 可被看作一个多属性 TWD 问题，即 MADM 为 TWD 的集合，因此可利用聚合的 TWD 模型解决 MADM 邻域中的问题。目前的研究在 TWD 和 MADM 中均已取得较多成果。为了进一步扩展不确定环境下的 MADM 研究，帮助决策者更好、更全面地做出最终决策，文献[19] 引入了基于加型一致性的模糊互补偏好关系，利用优化后的 TWD 模型处理 MADM 问题。但是，这种模型只能用于粗糙集环境下，未考虑到直觉模糊环境下的基于偏好关系的决策问题。

鉴于此，结合基于加型一致性的直觉模糊偏好关系、TWD 理论和 MADM 思想，提出一种新的决策办法，即基于加型一致性的直觉模糊偏好关系三支多属性决策方法。该方法采用模糊偏好关系的三支决策模型，并将其应用到直觉模糊环境中。

1 预备知识

1.1 直觉模糊集

定义 1[20] 假设X是一个非空集合，一般被称之为论域，则X上的直觉模糊集A可表示为

$$A=\{\langle x,u_A(x),v_A(x)\rangle \mid x\in X\}。 \tag{1}$$

对于每个直觉模糊数$x\in X$，$u_A(x)$表示元素x属于集合A的程度，也称为隶属度；$v_A(x)$表示元素x不属于A的程度，也称为非隶属度。$u_A(x)\in[0,1]$，$v_A(x)\in[0,1]$且满足$0\leqslant u_A(x)+v_A(x)\leqslant 1$。

定义 2[20] 设直觉模糊数$x=(u_A,v_A)$，则x的理想正度为

$$I(x)=1-\sqrt{\frac{(1-u_A)^2+v_A{}^2}{2}}, \tag{2}$$

而且，对于任意 2 个直觉模糊数$x=(u_x,v_x)$，

$y=(u_y,v_y)$, 当且仅当$I(x)\geqslant I(y)$时, 存在$x\geqslant y$。

定义 3[20] 有 2 个直觉模糊数$x=(u_x,v_x)$, $y=(u_y,v_y)$, 则有

$$(\mathrm{i})x=(u_x,v_x)\text{的补集是}\widetilde{x}=(v_x,u_x);\tag{3}$$

$$(\mathrm{ii})x\oplus y=(1-(1-u_x)(1-u_y),v_xv_y);\tag{4}$$

$$(\mathrm{iii})x\otimes y=(u_xu_y,1-(1-v_x)(1-v_y));\tag{5}$$

$$(\mathrm{iv})\theta x=(1-(1-u_x)^{\theta},v_x^{\theta}),\theta>0;\tag{6}$$

$$(\mathrm{v})x^{\theta}=(u_x^{\theta},1-(1-v_x)^{\theta}),\theta>0。\tag{7}$$

定义 4[21] 集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的直觉模糊偏好关系定义为$R=(r_{ij})_{n\times n}$, 其中直觉模糊数$r_{ij}=\langle(x_i,x_j),u(x_i,x_j),v(x_i,x_j)\rangle$, 简写为$r_{ij}=(u_{ij},v_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots,n$。u_{ij}表示项目x_i对x_j的偏好程度, v_{ij}表示项目x_i对x_j的不偏好程度, 满足特点:

$$0\leqslant\mu_{ij}+v_{ij}\leqslant 1,\mu_{ji}=v_{ij},v_{ji}=\mu_{ij},$$

$$\mu_{ii}=v_{ii}=0.5,i,j=1,2,\cdots,n。$$

定义 5[22] 存在n个直觉模糊数$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 其中$x_i=(u_i,v_i),i=1,2,\cdots,n$, 直觉模糊加权平均算子 (intuitionistic fuzzy weighted averaging, 简称 IFWA) 定义为

$$\mathrm{IFWA}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\oplus_{i=1}^{n}(w_ix_i)=\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-u_i)^{w_i},\prod_{i=1}^{n}v_i^{w_i}\right)\tag{8}$$

1.2　三支决策

设U是有限实体集, 包含实体x的关系E的等价类记为$[x]_E=[x]=\{y\in U|xEy\}$。所有等价类的集合记为$U/E=\{[x]_E|x\in U\}$, 是对实体集的一种划分。假设存在子集$A(A\subseteq U)$和阈值对(α,β)满足条件$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 1$, 则在该概率粗糙集中, 集合A的下近似和上近似可表示为[2]:

$$\underline{\mathrm{apr}}(A)=\{x\in U|P(A|[x])\geqslant\alpha\};$$
$$\overline{\mathrm{apr}}(A)=\{x\in U|P(A|[x])>\beta\};$$

其中, $P(A|[x])\mathrm{Pr}(\mathrm{C}|\mathrm{x}])$表示实体$x$的等价类$[x]$属于集合$A$的条件概率, 其计算方式为$P(A|[x])=\dfrac{|A|[x]||}{|[x]|}$, $|\cdot|$表示集合的基数。

基于上下近似的定义, Pawlak 粗糙集[23] 中的正域、负域和边界域表示为:

$$\begin{aligned}&\mathrm{POS}(A)=\{x\in U\mid P(A\mid[x])\geqslant\alpha\};\\&\mathrm{BND}(A)=\{x\in U\mid\alpha>P(A\mid[x])>\beta\};\\&\mathrm{NEG}(A)=\{x\in U\mid P(A\mid[x])\leqslant\beta\};\end{aligned}\tag{9}$$

决策粗糙集模型中的阈值和分类代价关系可用贝叶斯决策理论解释。设表示 2 种状态的集合, 其中状态A表示实体$x\in A$, 状态A^c表示实体$x\notin A$。每种状态对应 3 个决策$\{a_{\mathrm{P}},a_{\mathrm{B}},a_{\mathrm{N}}\}$, 3 个决策分别代表对实体$x$采用的分类动作, 即决定实体被分类到正域$x\in\mathrm{POS}(A)$, 边界域$x\in\mathrm{BND}(A)$和负域$x\in\mathrm{NEG}(A)$的结果。损失矩阵如表 1 所示。其中: λ_{PP}, λ_{BP}和λ_{NP}分别表示当实体属于集合A时, 采取 3 种决策a_{P},a_{B}和a_{N}的代价; 而λ_{PN},λ_{BN}和λ_{NN}分别表示若实体不属于集合A, 做出决策a_{P},a_{B}和a_{N}的代价。根据损失矩阵的现实语义, 存在$\lambda_{\mathrm{PP}}\lambda_{\mathrm{BP}}<\lambda_{\mathrm{NP}},\lambda_{\mathrm{NN}}\lambda_{\mathrm{BN}}<\lambda_{\mathrm{PN}}$。

表 1　损失矩阵

λ	A	A^{c}
a_{P}	λ_{PP}	λ_{PN}
a_{B}	λ_{BP}	λ_{BN}
a_{N}	λ_{NP}	λ_{NN}

基于贝叶斯决策理论, 可计算不同决策下的损失函数:

$$\begin{aligned}&R(a_{\mathrm{P}}\mid[x])=\lambda_{\mathrm{PP}}P(A\mid[x])+\lambda_{\mathrm{PN}}P(A^{\mathrm{c}}\mid[x]);\\&R(a_{\mathrm{B}}\mid[x])=\lambda_{\mathrm{BP}}P(A\mid[x])+\lambda_{\mathrm{BN}}P(A^{\mathrm{c}}\mid[x]);\\&R(a_{\mathrm{N}}\mid[x])=\lambda_{\mathrm{NP}}P(A\mid[x])+\lambda_{\mathrm{NN}}P(A^{\mathrm{c}}\mid[x]);\end{aligned}\tag{10}$$

其中, $R(a_{\cdot}|[x])$表示对$[x]$中的对象采取对应$a_{\cdot}$措施时损失函数, $\cdot=\mathrm{P},\mathrm{B},\mathrm{N}$, 通过贝叶斯决策理论, 可推断出最小风险决策规则:

P规则: 若$R(a_{\mathrm{P}}|[x])\leqslant R(a_{\mathrm{B}}|[x])$且$R(a_{\mathrm{P}}|[x])\leqslant R(a_{\mathrm{N}}|[x])$, 可得$x\in\mathrm{POS}(A)$;

B规则: 若$R(a_{\mathrm{B}}|[x])\leqslant R(a_{\mathrm{P}}|[x])$且$R(a_{\mathrm{B}}|[x])\leqslant R(a_{\mathrm{N}}|[x])$, 可得$x\in\mathrm{BND}(A)$;

N规则: 若$R(a_{\mathrm{N}}|[x])\leqslant R(a_{\mathrm{P}}|[x])$且$R(a_{\mathrm{N}}|[x])\leqslant R(a_{\mathrm{B}}|[x])$, 可得$x\in\mathrm{NEG}(A)$。

由于$P(A|[x])+P(A^{\mathrm{c}}|[x])=1$, 当满足$(\lambda_{\mathrm{PN}}-\lambda_{\mathrm{BN}})(\lambda_{\mathrm{NP}}-\lambda_{\mathrm{BP}})>(\lambda_{\mathrm{BP}}-\lambda_{\mathrm{PP}})(\lambda_{\mathrm{BN}}-\lambda_{\mathrm{NN}})$和$\alpha>\beta$时, 决策矩阵规则可简化为:

P^{1}规则: 若$P(A|[x])\geqslant\alpha$, 可得$x\in\mathrm{POS}(A)$

B^{1}规则: 若$\beta<P(A|[x])<\alpha$, 可得$x\in\mathrm{BND}(A)$

N^{1}规则: 若$P(A|[x])\leqslant\beta$, 可得$x\in\mathrm{NEG}(A)$

此时满足:

$$\begin{aligned}&\alpha=\frac{\lambda_{PN}-\lambda_{BN}}{(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})+(\lambda_{BP}-\lambda_{PP})},\\&\beta=\frac{\lambda_{BN}-\lambda_{NN}}{(\lambda_{BN}-\lambda_{NN})+(\lambda_{NP}-\lambda_{BP})},\\&\gamma=\frac{\lambda_{PN}-\lambda_{NN}}{(\lambda_{PN}-\lambda_{NN})+(\lambda_{NP}-\lambda_{PP})}。\end{aligned}\tag{11}$$

2　决策方法

2.1　决策模型

假设存在多属性决策系统, 其中, 决策方案集合

$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 评价属性集合为$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$。对于每 1 个方案x_i, 在属性a_k下都存在一个评估值$f(x_i,a_k)=\langle(x_i,a_k),u(x_i,a_k),v(x_i,a_k)\rangle=(u_{ik},v_{ik})$。其中, u_{ik}表示方案x_i对属性a_k的隶属度, v_{ik}表示方案x_i对属性a_k的非隶属度, $u_{ik}\in[0,1]$, $v_{ik}\in[0,1]$, $0\leqslant u_{ik}+v_{ik}\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$; $k=1,2,\cdots,m$。

不同属性下的方案之间直觉模糊偏好关系$\boldsymbol{R}^{(k)}=(r_{ij}^{(k)})$, $k=1,2,\cdots,m$。其中, $\boldsymbol{r}_{ij}^{(k)}=(u_{ij}^{(k)},v_{ij}^{(k)})$, $u_{ij}^{(k)}$表示在属性a_k下方案x_i对方案x_j的偏好程度, $v_{ij}^{(k)}$表示在属性a_k下方案x_i对方案x_j的不偏好程度, $u_{ij}^{(k)}\in[0,1]$, $v_{ij}^{(k)}\in[0,1]$, $0\leqslant u_{ij}^{(k)}+v_{ij}^{(k)}\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,n$; $k=1,2,\cdots,m$。依据实际情况确定属性权重向量$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots w_m)^{\mathrm{T}}$, 满足$0\leqslant w_k\leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{m}w_k=1$, $k=1,2,\cdots,m$。另外为每个属性设置风险评估系数θ_k, $k=1,2,\cdots,m$。

在 MADM 系统中, $\boldsymbol{R}^{(k)}$为对应的加型一致性的直觉模糊偏好关系矩阵, 存在阈值$\xi\in[0.5,1]$, 对于方案$x_i\in X$, 存在等价类$[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi}$。由于直觉模糊偏好关系中的值为直觉模糊数, 为了进行比较, 利公式 (2) 对数据进行处理, 得到以下划分:

1)$[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi-}=\{x_j\in X\,|\,I(r_{ij}^{(k)})>\xi\}$, 表明$x_i$优于所有满足条件的$x_j$, 该区域是方案$x_i$的$\xi$-优势域;

2)$[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi}=\{x_j\in X\,|\,1-\xi\leqslant I(r_{ij}^{(k)})\leqslant\xi\}$, 表明$x_i$与所有满足条件的$x_j$一样好, 是方案$x_i$的$\xi$-相似域;

3)$[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi+}=\{x_j\in X\,|\,I(r_{ij}^{(k)})<1-\xi\}$, 表明$x_i$弱于所有满足条件的$x_j$, 是方案$x_i$的$\xi$-弱势域。

显然, 存在$[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi-}\cup[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi}\cup[x_i]_{R^{(k)}}^{\xi+}=X$, 由此可推出:

推论 5 在决策系统中, $R^{(k)}$为加型一致性的直觉模糊偏好关系矩阵, 存在阈值$\xi\in[0.5,1]$, 对于$x_i\in X$, 其ξ-相似类的定义为

$$[x_i]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}=\left\{x_j\in X\,\middle|\,1-\xi\leqslant I(\sum_{k=1}^{m}w_k r_{ij}^{(k)})\leqslant\xi\right\}。\qquad(12)$$

也就是说, 满足条件的方案x_j就是方案x_i的ξ-相似类中的元素, $i,j=1,2,\cdots,n$。此时, 等价类$X/F=\{[x_i]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\,|x_i\in X\}$表示 MADM 中所有方案相对于方案$x_i$的分类, 这种表示方法可以完整包含$X$中所有的方案。

在决策系统中, 给定阈值对$0\leqslant\beta\leqslant\alpha\leqslant 1$, 对于模糊集$D\in R(X)$, 其关于$\xi$-相似类的上下界被定义为:

$$\overline{R_X^{\xi}}(D)=\left\{x|P\left(D|[x]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)>\beta\right\};$$
$$\underline{R_X^{\xi}}(D)=\left\{x|P\left(D|[x]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)\geqslant\alpha\right\}。$$

其中, 方案x_i的模糊属性计算式为

$$D(x_i)=I\left(\sum_{k=1}^{m}w_k f(x_i,a_k)\right),i=1,2,\cdots,n。\qquad(13)$$

由此可得对应的条件概率为

$$P\left(D|[x_i]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)=\frac{\sum_{y\in[x_i]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}}D(y)}{\left|[x_i]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right|},\qquad(14)$$

基于上下界所得的决策理论模糊集, 可将整个区域划分为:

$$\mathrm{POS}(D)=\{x|P\left(D|[x]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)\geqslant\alpha\};$$
$$\mathrm{BND}(D)=\{x|\beta<P\left(D|[x]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)<\alpha\};$$
$$\mathrm{NEG}(D)=\{x|P\left(D|[x]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)\leqslant\beta\}。$$

在决策系统中, 除了求取条件概率之外, 损失函数矩阵 (如表 1) 的相关计算也是 TWD 模型中的重中之重。文献[4]中讨论了直觉模糊数在 TWD 中的相对损失函数, 如表 2 所示。

表 2 相对损失矩阵

λ	A	A^c
a_{P}	$\lambda_{\mathrm{PP}}=o=(0,1)$	$\lambda_{\mathrm{PN}}=\overline{f(x_i,a_k)}=(v_{ik},u_{ik})$
a_{B}	$\lambda_{\mathrm{BP}}=\theta_j f(x_i,a_k)=(1-(1-u_{ik})^{\theta_j},{v_{ik}}^{\theta_j})$	$\lambda_{\mathrm{BN}}=\theta\overline{f(x_i,a_k)}=(1-(1-v_{ik})^{\theta_j},{u_{ik}}^{\theta_j})$
a_{N}	$\lambda_{\mathrm{NP}}=f(x_i,a_k)=(u_{ik},v_{ik})$	$\lambda_{\mathrm{NN}}=o=(0,1)$

相对损失矩阵从损失函数的语义出发, 认为λ_{PP}表示当决策方案$x\in A$时, 将方案分类到正确的POS(D)域中, 这种行为的损失相对于λ_{BP}和λ_{NP}而言很小, 可以忽略不计, 因此用最小的直觉模糊数$o=(0,1)$进行表示; 同理, λ_{NN}的值也是$o=(0,1)$。而$x=(u,v)$作为将$x\in A$的决策方案分类到绝对错误的NEG(D)域中的损失值, 用于表示λ_{NP}; 同理, 依据定义 3, 作为x的补集, $\bar{x}$可以表示相对损失λ_{PN}。λ_{BP}和λ_{BN}是介于分类正确和绝对错误之间的值, 因此引入风险参数θ_j表示BND(D)中的相对损失函数。其中, 直觉模糊数之间的计算参考式 (3~7)。

基于表 2, 采用式 (8) 中的聚合算子 IFWA 计算聚合相对损失矩阵, 再利用式 (2) 中的理想正度对聚合损失矩阵中的相对损失值进行转化, 保留顺序信息。最终得到能够进行大小比较的聚合相对损失矩阵, 如表 3 所示。

表 3　聚合相对损失矩阵

λ	A^*	A^{*c}
a_P	0	$I\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-v_{ij}\right)^{w_i},\prod_{j=1}^{n}u_{ij}^{w_i}\right)$
a_B	$I\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-u_{ij}\right)^{\theta_j w_i},\prod_{j=1}^{n}v_{ij}^{\theta_j w_i}\right)$	$I\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-v_{ij}\right)^{\theta_j w_i},\prod_{j=1}^{n}u_{ij}^{\theta_j w_i}\right)$
a_N	$I\left(1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-v_{ij}\right)^{w_i},\prod_{j=1}^{n}u_{ij}^{w_i}\right)$	0

将表 3 中的损失值代入式 (11), 求得方案x_i的对应阈值$(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$。基于决策规则$P^2$、$B^2$、$N^2$, 对比条件概率$P\left(D|[x_i]_{R_{agg}^{\xi}}\right)$与所得阈值$(\alpha_i,\beta_i)$, 得到对每个决策方案的最优分类结果。

P^2规则: 若$P\left(D|[x_i]_{R_{agg}^{\xi}}\right)\geqslant\alpha_i$, 可得$x\in\mathrm{POS}(D)$;

B^2规则: 若$\beta_i<P\left(D|[x_i]_{R_{agg}^{\xi}}\right)<\alpha_i$, 可得$x\in\mathrm{BND}(D)$;

N^2规则: 若$P\left(D|[x_i]_{R_{agg}^{\xi}}\right)\leqslant\beta_i$, 可得$x\in\mathrm{NEG}(D)$。

受文献[19]的启发, 考虑排序规则P^3、B^3、N^3, 可以得到决策方案的偏好选择结果。

P^3规则: 对于任意 2 个决策方案$x_i,x_j\in X$, 若$\alpha_i\leqslant\alpha_j$, 则认为方案$x_i$优于方案$x_j$;

B^3规则: 对于任意 2 个决策方案$x_i,x_j\in X$, 若$\beta_i\leqslant\beta_j$, 则认为方案x_i优于方案x_j;

N^3规则: 对于任意 2 个决策方案$x_i,x_j\in X$, 若$\gamma_i\leqslant\gamma_j$, 则认为方案$x_i$优于方案$x_j$。

2.2　决策步骤

根据以上的模型介绍, 得到的决策步骤流程图如图 1 所示。具体步骤如下:

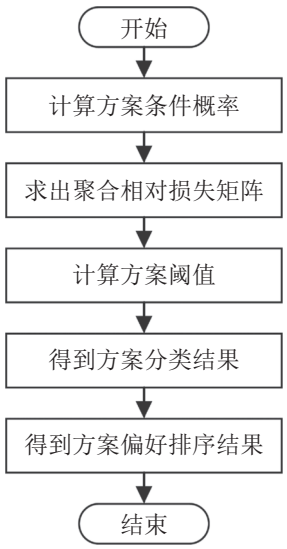

图 1　所提模型的决策步骤流程图

1) 对直觉模糊偏好关系矩阵$\boldsymbol{R}^{(k)}=(r_{ij}^{(k)}),k=1,2,\cdots,m$, 根据式 (12) 计算每个方案$x_i$的$\xi$-相似类, 其中$\xi\in[0.5,1]$根据实际情况进行赋值。再根据模糊集的定义, 利用式 (13) 得到每个方案x_i对应的模糊属性$D(x_i)$。最后通过式 (14) 得到方案x_i的条件概率$P\left(D|[x_i]_{R_{agg}^{\xi}}\right)$。

2) 对于决策理论中给定的决策矩阵$f(x_i,a_k)$, $(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,m)$, 基于表 2, 计算直觉模糊数在决策理论粗糙集中的相对损失函数。通过式 (8) 和式 (2) 对相对损失函数按照方案进行聚合, 得到如表 3 所示的聚合损失矩阵;

3) 对于步骤 2) 所得到的聚合损失矩阵, 根据式 (11), 得到每个方案x_i对应的阈值$(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$。

4) 对于方案x_i, 根据规则P^2、B^2、N^2, 对比步骤 1) 得到的条件概率$P\left(D|[x_i]_{R_{agg}^{\xi}}\right)$, 以及步骤 3) 得到的阈值$(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, 得到$x_i$的分类结果。

5) 对于步骤 3) 所得的全部阈值$(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, 根据规则$(P^3$、$B^3$、$N^3)$对所有方案的对应阈值进行排序比较, 得到方案的偏好排序结果。

3　实例分析

供应商选择问题是 MADM 领域里的经典问题。然而, 现有方法只考虑项目间的偏序关系[24-25], 不采用分类思想, 容易导致决策结果过于绝对, 可能有损企业效益。为了降低企业收益风险, 在出现项目都不合适的情况时, 应该拒绝选择或者延迟该供应商的决策过程, 考虑对项目做进一步评估。因此采用基于加型一致性的直觉模糊偏好关系三支模型处理供应商选择问题, 可使决策过程更加严谨、全面。

3.1　实验

某企业要选择零部件供应商, 将一组供应商$\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,x_3\}$作为方案备选, 主要的评价指标体系为$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$, 分别代表了供应商的产品总成本、产品质量、供应商服务绩效、供应商概况和风险因素。方案x_i在属性a_k下的评估值$f(x_i,a_k)=(u_{ik},v_{ik})$, $i=1,2,3;k=1,2,\cdots,5$如表 4 所示。

依据实际情况对不同评价指标下的备选供应商

表 4 决策矩阵f

方案	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	(0.294 1,0.538 5)	(0.292 5,0.486 5)	(0.336 6,0.455 7)	(0.421 1,0.482 4)	(0.373 7,0.481 5)
x_2	(0.196 1,0.615 4)	(0.198 1,0.540 5)	(0.267 3,0.582 3)	(0.242 1,0.694 1)	(0.252 5,0.617 3)
x_3	(0.274 5,0.538 5)	(0.207 5,0.540 5)	(0.178 2,0.683 5)	(0.231 6,0.705 9)	(0.191 9,0.679)

进行偏好评价,得到基于加型一致性的直觉模糊偏好关系$R^{(1)}$、$R^{(2)}$、$R^{(3)}$、$R^{(4)}$、$R^{(5)}$,如表 5~9 所示。关系矩阵中的评价值记为$r_{ij}^{(k)}=(u_{ij}^{(k)},v_{ij}^{(k)})$,$u_{ij}^{(k)}u_{ij}$表示在属性$a_k$下方案$x_i$对方案$x_ja_j$的偏好程度,v$_{ij}$$v_{ij}^{(k)}$表示在属性$a_k$下方案$x_i$对方案$x_ja_j$的不偏好程度,$u_{ij}^{(k)}\in[0,1]$,$v_{ij}^{(k)}\in[0,1]$,$0\leqslant u_{ij}^{(k)}+v_{ij}^{(k)}\leqslant 1$。

表 5 基于加法一致性的直觉模糊偏好关系$R^{(1)}$

$R^{(1)}$	x_1	x_2	x_3
x_1	(0.5,0.5)	(0.6,0.2)	(0.4,0.5)
x_2	(0.2,0.6)	(0.5,0.5)	(0.3,0.4)
x_3	(0.5,0.4)	(0.4,0.3)	(0.5,0.5)

表 6 基于加法一致性的直觉模糊偏好关系$R^{(2)}$

$R^{(2)}$	x_1	x_2	x_3
x_1	(0.5,0.5)	(0.6,0.2)	(0.45,0.4)
x_2	(0.2,0.6)	(0.5,0.5)	(0.35,0.2)
x_3	(0.4,0.45)	(0.2,0.35)	(0.5,0.5)

表 7 基于加法一致性的直觉模糊偏好关系$R^{(3)}$

$R^{(3)}$	x_1	x_2	x_3
x_1	(0.5,0.5)	(0.55,0.25)	(0.65,0.1)
x_2	(0.25,0.55)	(0.5,0.5)	(0.6,0.3)
x_3	(0.1,0.65)	(0.3,0.6)	(0.5,0.5)

表 8 基于加法一致性的直觉模糊偏好关系$R^{(4)}$

$R^{(4)}$	x_1	x_2	x_3
x_1	(0.5,0.5)	(0.8,0.1)	(0.7,0.2)
x_2	(0.1,0.8)	(0.5,0.5)	(0.55,0.4)
x_3	(0.2,0.7)	(0.4,0.55)	(0.5,0.5)

表 9 基于加法一致性的直觉模糊偏好关系$R^{(5)}$

$R^{(5)}$	x_1	x_2	x_3
x_1	(0.5,0.5)	(0.7,0.2)	(0.65,0.2)
x_2	(0.2,0.7)	(0.5,0.5)	(0.55,0.25)
x_3	(0.2,0.65)	(0.25,0.55)	(0.5,0.5)

另外,给出评价指标的属性权重$\boldsymbol{w}=(0.2891,0.2347,0.1837,0.1614,0.1311)^{\mathrm{T}}$,以及属性的风险评估系数$\theta_k=0.2$。

1) 首先根据式 (12) 和表 5~9,令$\xi=0.7$,计算每个方案x_i的ξ-相似类:

$$[x_1]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}=\{x_1,x_3\},$$
$$[x_2]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}=\{x_2,x_3\},$$
$$[x_3]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}=\{x_1,x_2,x_3\}。$$

针对表 4,利用式 (13) 得到每个方案x_i对应的模糊属性$D(x_i)$:

$$D(x_1)=0.4139,$$
$$D(x_2)=0.3058,$$
$$D(x_3)=0.3037。$$

综上,代入式 (14) 中,求出每个方案x_i相应的条件概率:

$$P\left(D|[x_1]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)=0.3588,$$
$$P\left(D|[x_2]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)=0.3048,$$
$$P\left(D|[x_3]_{R_{\mathrm{agg}}^{\xi}}\right)=0.3411。$$

2) 对于表 4 中的决策矩阵$f(x_i,a_k)$,基于表 2,计算直觉模糊数在决策理论粗糙集中的相对损失函数。再通过式 (2)、(8) 对相对损失函数按照方案进行聚合,得到如表 10 所示的聚合损失矩阵。

表 10 聚合相对损失矩阵

方案		A^*	$A^{*\mathrm{c}}$
x_1	a_{P}	0	0.547 5
	a_{B}	0.135 2	0.154 1
	a_{N}	0.430 9	0
x_2	a_{P}	0	0.649 3
	a_{B}	0.141 8	0.195 2
	a_{N}	0.338 2	0
x_3	a_{P}	0	0.743 2
	a_{B}	0.155 6	0.247 4
	a_{N}	0.244 2	0

3) 对于表 10,根据式 (11),得到所有方案对应的阈值,如表 11 所示。

表 11　不同方案对应阈值

阈值	x_1	x_2	x_3
α_i	0.744 2	0.762 0	0.761 1
β_i	0.342 6	0.498 5	0.736 3
γ_i	0.559 6	0.657 5	0.752 7

4) 根据三支决策规则P^2、B^2、N^2, 对比条件概率$P\left(D|[x_i]_{R^c_{agg}}\right)$, 以及阈值$(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, 得到最终结果: $POS(A)=\emptyset$, $BND(A)=\{x_1\}$, $NEG(A)=\{x_2,x_3\}$。

5) 根据决策规则P^3、B^3、N^3, 对表 11 中的内容进行排序比较, 最终得到阈值排序结果, 如表 12 所示。

表 12　阈值排序结果

阈值	排序结果	最优方案	最差方案
α	$x_1 \succ x_3 \succ x_2$	x_1	x_2
β	$x_1 \succ x_2 \succ x_3$	x_1	x_3
γ	$x_1 \succ x_2 \succ x_3$	x_1	x_3

3.2　结果说明

根据实验中规则P^2、B^2、N^2可得, 该问题无最优决策方案, 次优决策方案为x_1, 最差决策方案为x_2,x_3。决策结果: 建议方案x_1做进一步调研, 再重新进行决策分析。

根据规则P^3、B^3、N^3所得的表 12 可知, 最优决策方案始终为x_1, 结果具有一致性。而最差决策方案为x_2,x_3。决策结果: 建议选择最优决策方案x_1。

综合 2 个规则的决策结果可知, 最好对方案x_1做进一步调研, 并重新进行决策分析, 若一定要做出选择, 则建议选择决策方案x_1, 不选择x_2,x_3。

3.3　对比分析

1) 正确性分析

文献 [25] 中描述了一种用于解决 MADM 问题的基于直觉模糊偏好关系的层次分析法。将 IFAHP 方法应用到本实例中, 得出所有方案对应的排序向量为$\boldsymbol{v}_1$=(0.217 2,0.609 3), $\boldsymbol{v}_2$=(0.144 4,0.542 5), $\boldsymbol{v}_3$=(0.146 4,0.547 9)。

为了保证对比试验中直觉模糊数比较的一致性, 对所得的排序向量式 (2) 进行转换, 得到对象的排序向量理想度为$\boldsymbol{I}(v_1)$=0.300 9, $\boldsymbol{I}(v_2)$=0.283 6, $\boldsymbol{I}(v_3)$=0.282 8。得到方案的排序结果为$x_1 \succ x_2 \succ x_3$, 这与本方法的决策结果一致, 因此证明了本模型的可行性。

2) 有效性分析

相较于文献 [25], 在考虑方案之间直觉模糊偏好关系外, 用 TWD 模型处理 MADM 问题。TWD 模型的特点在于, 除了选择、不选择之外, 还存在延迟选择的选项。

从本文实例出发, 本方法可给出延迟选择的建议, 让决策者充分了解最优(偏好)排序方案的实际选择价值。能够充分站在企业收益最大化的角度上考虑, 当所有方案都不够优时, 允许企业“暂不选择, 充分调研后再进行决策”。

综上所述, 本决策方案信息充分, 除了包含方案之间的偏好关系外, 还包含方案的分类结果。立足与现实语境之中, 本决策结果更具有实操性。

4　结束语

将不确定性与决策问题相结合, 提出了一种基于加型一致性的直觉模糊偏好关系 TWD 模型, 拓展了 TWD 理论的研究方向。首先, 从决策粗糙集的理论出发, 计算条件概率, 并通过 IFWG 算子对直觉模糊数相对损失函数的聚类计算进行简化, 进一步优化了 TWD 模型。然后, 通过聚合的方式, 将 MADM 问题转化为 TWD 问题, 并结合模糊偏好关系理论, 为解决决策问题提供了解决的新思路。最终, 实验结果表明了该模型的可行性和有效性。然而, 本方法只适用于解决信息模糊的 MADM 问题, 在处理模糊信息上, 考虑还不够全面。未来, 可以结合乘法一致性和直觉模糊偏好关系的 TWD 理论, 提出新的 TWD 模型,或者将 MADM 问题更深度地与模糊环境相结合, 进一步扩展决策理论。

参考文献:

[1] 王国胤, 姚一豫, 于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报, 2009, 32(7): 1229-1246.

[2] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information sciences, 2010, 180(3): 341-353.

[3] JIA F, LIU P D. A novel three-way decision model under multiple-criteria environment[J]. Information Sciences, 2019, 471: 29-51.

[4] LIU P D, WANG Y M, JIA F, et al. A multiple attribute decision making three-way model for intuitionistic fuzzy numbers[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 119: 177-203.

[5] YE D J, LIANG D C, HU P. Three-way decisions with interval-valued intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets in group decision-making[J]. Symmetry, 2018, 10(7): 281.

[6] LIANG D C, XU Z S, LIU D, et al. Method for three-way decisions using ideal TOPSIS solutions at

Pythagorean fuzzy information[J]. Information Sciences, 2018, 435: 282-295.

[7] YE J, ZHAN J M, XU Z S. A novel decision-making approach based on three-way decisions in fuzzy information systems[J]. Information Sciences, 2020, 541: 362-390.

[8] ZHAN J M, YE J, DING W P, et al. A novel three-way decision model based on utility theory in incomplete fuzzy decision systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 30(7): 2210-2226.

[9] LIANG D C, PEDRYCZ W, LIU D, et al. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets under linguistic assessment with the aid of group decision making[J]. Applied Soft Computing, 2015, 29: 256-269.

[10] DHIMAN HS, DEB D. Fuzzy TOPSIS and fuzzy COPRAS based multi-criteria decision making for hybrid wind farms[J]. Energy, 2020, 202: 117755.

[11] HASHEMI A, DOWLATSHAHI M B, NEZAMABADI-POUR H. VMFS: a VIKOR-based multi-target feature selection[J]. Expert Systems with Applications, 2021, 182: 115224.

[12] PAMUCAR D, STEVIC Ž, SREMAC S. A new model for determining weight coefficients of criteria in mcdm models: full consistency method (fucom)[J]. Symmetry, 2018, 10(9): 393.

[13] DEVECI K, CIN R, KAGIZMAN A. A modified interval valued intuitionistic fuzzy CODAS method and its application to multi-criteria selection among renewable energy alternatives in Turkey[J]. Applied Soft Computing, 2020, 96: 106660.

[14] LIANG D C, XU Z S, LIU D. Three-way decisions with intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets based on point operators[J]. Information Sciences, 2017, 375: 183-201.

[15] LIU PD, YANG HY. Three-way decisions with single-valued neutrosophic decision theory rough sets based on grey relational analysis[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019, 2019: 1-12.

[16] WEI G W, ZHANG N. A multiple criteria hesitant fuzzy decision making with Shapley value-based VIKOR method[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 26(2): 1065-1075.

[17] LIU P D, WANG P, PEDRYCZ W. Consistency-and consensus-based group decision-making method with incomplete probabilistic linguistic preference relations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 29(9): 2565-2579.

[18] WAN S P, CHENG X J, CHEN C X, et al. LR geometric consistency definition of triangular multiplicative preference relation in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 409: 85-113.

[19] WANG Q M, DAI J H, XU Z S. A new three-way multi-criteria decision-making method with fuzzy complementary preference relations based on additive consistency[J]. Information Sciences, 2022, 592: 277-305.

[20] ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal Bioautomation, 2016, 20: 1-6.

[21] BEHRET H. Group decision making with intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 70: 33-43.

[22] XU Z S, CAI X Q. Recent advances in intuitionistic fuzzy information aggregation[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2010, 9(4): 359-381.

[23] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11: 341-356.

[24] 徐泽水. 直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(11): 62-71.

[25] XU Z S, LIAO H C. Intuitionistic fuzzy analytic hierarchy process[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 22(4): 749-761.

编辑：张所滨